

EJERCICIOS Y PROBLEMAS RESUELTOS

1. Operaciones con matrices

Calcula la matriz

$$M = P^2 - 3P - 2I$$

siendo I la matriz identidad de orden 2 y

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left. \begin{aligned} P^2 &= P \cdot P = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} \\ 3P &= 3 \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 9 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} \\ 2I &= 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} M &= \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 & 9 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \\ M &= \begin{pmatrix} 8 & -9 \\ -6 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

2. Ecuación matricial

Determina la matriz X que verifica:

$$AXA - B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Hallamos la matriz inversa de A , A^{-1} , que debe cumplir $A \cdot A^{-1} = I$:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} 3a + c = 1 & a = 1 \\ -2a - c = 0 & c = -2 \end{cases} \\ A \cdot A^{-1} &= I \quad \begin{cases} 3b + d = 0 & b = 1 \\ -2b - d = 1 & d = -3 \end{cases} \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Despejamos X , pasando B al segundo miembro y multiplicando por la derecha y por la izquierda por A^{-1} :

$$AXA = B \rightarrow A^{-1}AXAA^{-1} = A^{-1}BA^{-1} \rightarrow IXI = A^{-1}BA^{-1} \rightarrow X = A^{-1}BA^{-1}$$

$$\text{Por tanto: } X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ -13 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

Comprobamos que la matriz $X = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$ cumple $AXA - B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

3. Combinación lineal de matrices

Estudiar si existe algún valor de n que verifique:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$$

Efectuamos las operaciones del primer miembro e igualamos los elementos que ocupan la misma posición:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 3n \\ 2n & n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1+3n \\ 2+2n & -1+n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} 1+3n = 7 \\ 2+2n = 6 \\ -1+n = 1 \end{cases}$$

Estas tres ecuaciones tienen la misma solución, $n = 2$, que es el valor buscado. ¿Qué ocurriría si no tuvieran todas la misma solución? Pues que no existiría ningún número n para el cual se verificara la igualdad.

4. Matriz inversa

Prueba que la matriz

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$$

no tiene inversa.

Si $B^{-1} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ es la inversa de B , $B \cdot B^{-1} = I$. En este caso:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} 2x - z = 1 \\ 4x - 2z = 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} 2y - t = 0 \\ 4y - 2t = 1 \end{cases}$$

Hemos obtenido dos sistemas de ecuaciones que no tienen solución. Por tanto, la matriz B no tiene inversa.

5. Operaciones con matrices

Si A es una matriz de orden n tal que $A^2 = A$ y $B = 2A - I$, siendo I la matriz identidad de orden n , calcula B^2 .

$$B^2 = B \cdot B = (2A - I)(2A - I) = 4A^2 - 2AI - I2A + I^2$$

Teniendo en cuenta que $A^2 = A$, $I^2 = I$, $2AI = I2A = 2A$:

$$B^2 = 4A - 2A - 2A + I \rightarrow B^2 = I$$

6. Potencia n -ésima

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, calcula A^n .

Calculamos A^2, A^3, A^4, \dots $A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = A^3 \cdot A = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 8 \\ 8 & 8 \end{pmatrix}$$

Observamos que:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2^1 & 2^1 \\ 2^1 & 2^1 \end{pmatrix} \quad A^3 = \begin{pmatrix} 2^2 & 2^2 \\ 2^2 & 2^2 \end{pmatrix} \quad A^4 = \begin{pmatrix} 2^3 & 2^3 \\ 2^3 & 2^3 \end{pmatrix}$$

Suponemos que sigue la misma regla para el exponente n , es decir:

$$A^n = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 2^{n-1} \\ 2^{n-1} & 2^{n-1} \end{pmatrix}$$

Si comprobamos que esta expresión de A^n es válida para A^{n+1} , entonces será válida para cualquier n (método de inducción). Comprobamos que lo es:

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= A^n \cdot A = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 2^{n-1} \\ 2^{n-1} & 2^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 2^{n-1} + 2^{n-1} & 2^{n-1} + 2^{n-1} \\ 2^{n-1} + 2^{n-1} & 2^{n-1} + 2^{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^n & 2^n \\ 2^n & 2^n \end{pmatrix} \\ &\quad \uparrow \\ &\quad 2^{n-1} + 2^{n-1} = 2 \cdot 2^{n-1} = 2^n \end{aligned}$$

7. Ecuaciones con matrices

Calcula las matrices A y B que verifican:

$$A + B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$2A - 2B = \begin{pmatrix} -6 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

■ Multiplicamos por $\frac{1}{2}$ los dos miembros de la segunda ecuación y sumamos después las dos ecuaciones:

$$A - B = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A + B + (A - B) = 2A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 4 & 2 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

■ Despejamos B en la primera ecuación:

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

EJERCICIOS Y PROBLEMAS RESUELTOS

8. Ecuación matricial

Calcula x, y, z tales que:

$$\begin{pmatrix} 1 & y \\ x & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & x \\ y & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Transformamos esa igualdad en un sistema de ecuaciones multiplicando las matrices del primer miembro e igualando término a término:

$$\begin{pmatrix} 1+y^2 & x+yz \\ x+zy & x^2+z^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} 1+y^2 = 5 \\ x+zy = 0 \\ x^2+z^2 = 5 \end{cases} \begin{cases} y = \pm 2 \\ x+2z = 0 \\ x^2+z^2 = 5 \end{cases} \quad \text{O bien:} \quad \begin{cases} x-2z = 0 \\ x^2+z^2 = 5 \end{cases}$$

Se obtienen cuatro soluciones: $(2, 2, -1)$, $(2, -2, 1)$, $(-2, 2, 1)$, $(-2, -2, -1)$

9. Rango de una matriz

Estudia el rango de la matriz M según los valores de a . ¿Existe algún valor de a para el que sea $\text{ran}(M) = 1$?

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ 1 & 1 & a \\ a & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

■ Transformamos la matriz M para hacer todos los ceros posibles en ella:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ 1 & 1 & a \\ a & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{(1^2) \\ (2^2) - (1^2) \\ (3^2) - a(1^2)}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -2a & 1-a^2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{(1^2) \\ (2^2) \\ (3^2) - 2a(2^2)}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-a^2 \end{pmatrix}$$

Hacemos $1-a^2 = 0 \rightarrow a = 1, a = -1$

$$\left. \begin{array}{l} \text{■ Si } a = 1, M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \text{ran}(M) = 2 \\ \text{■ Si } a = -1, M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \text{ran}(M) = 2 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Por tanto, si } a = 1 \text{ o} \\ a = -1, \text{ran}(M) = 2. \end{array}$$

■ Si $a^2 - 1 \neq 0$, es decir, si $a \neq 1$ y $a \neq -1$, $\text{ran}(M) = 3$

■ El rango de M no puede ser igual a 1 para ningún valor de a , porque las dos primeras filas son linealmente independientes para cualquier a .

10. Matrices conmutables

Dada la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

obtén todas las matrices B que conmutan con A , es decir, que $A \cdot B = B \cdot A$.

$$\begin{aligned} \text{Sea } B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \\ &\rightarrow \begin{pmatrix} a+2c & b+2d \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 2a+b \\ c & 2c+d \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} a+2c = a & \rightarrow c = 0 \\ b+2d = 2a+b & \rightarrow a = d \\ d = 2c+d & \rightarrow c = 0 \end{cases}$$

Hay infinitas matrices que conmutan con A . Son de la forma:

$$B = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \quad a, b \in \mathbb{R}$$

11. Interpretación matricial de enunciados

La tabla adjunta muestra la cantidad de vitaminas A, B y C que posee cada uno de los productos P, Q, R, S por unidad de peso:

	A	B	C
P	1	2	0
Q	1	0	2
R	2	1	0
S	1	1	1

a) Queremos elaborar una dieta en la que entren todos los productos y de manera que contenga 20 unidades de vitamina A, 25 de vitamina B y 6 de vitamina C. ¿Es posible hacerlo? ¿De cuántas formas?

b) Si la cantidad de producto Q es de 2 unidades, ¿cuáles serán las cantidades de los otros productos en esa dieta?

c) Obtén, en función de la cantidad Q que entre en la dieta, las cantidades de los otros productos. ¿Entre qué valores habría de estar la cantidad de producto Q?

a) Llamemos $(x \ y \ z \ t)$ a las cantidades de cada uno de los productos P, Q, R y S que intervienen en la dieta. Para que la dieta tenga las cantidades de vitaminas requeridas, debe cumplirse la siguiente igualdad:

$$\begin{pmatrix} x & y & z & t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \text{P} & \text{Q} & \text{R} & \text{S} \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{A} & \text{B} & \text{C} \\ 20 & 25 & 6 \end{pmatrix}$$

Multiplicando e igualando las matrices llegamos al sistema:

$$\begin{cases} x + y + 2z + t = 20 \\ 2x + z + t = 25 \\ 2y + t = 6 \end{cases}$$

Mediante el método de Gauss podemos comprobar que el sistema es compatible indeterminado.

Por ello, pueden elaborarse infinitas dietas de los productos P, Q, R, S con las vitaminas exigidas.

b) Hacemos $y = 2$ y resolvemos el sistema que resulta. Obtenemos la solución $x = 10$, $z = 3$, $t = 2$. La dieta estará formada por 10 unidades de P, 2 de Q, 3 de R y 2 de S.

c) Resolvemos el sistema en función de y (cantidad de producto Q que interviene en la dieta).

Hacemos $y = \lambda$ y obtenemos las soluciones $(8 + \lambda, \lambda, 3, 6 - 2\lambda)$, que nos indican la cantidad de P, Q, R y S que forman cada una de las posibles dietas.

Para que estas cantidades no sean negativas, λ debe variar entre 0 y 3. Es decir: $0 < \lambda < 3$

12. Matriz inversa del producto de dos matrices

Se dice que una matriz es inversible cuando tiene matriz inversa. Demuestra que si A y B son inversibles, se verifica que $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$.

Si $B^{-1} \cdot A^{-1}$ es la inversa de $A \cdot B$, el producto de ambas debe ser igual a la matriz unidad I:

$$(A \cdot B) \cdot (B^{-1} \cdot A^{-1}) = A \cdot (B \cdot B^{-1}) \cdot A^{-1} \text{ por la propiedad asociativa del producto}$$

$$(A \cdot B) \cdot (B^{-1} \cdot A^{-1}) = A \cdot I \cdot A^{-1} \text{ ya que } B \cdot B^{-1} = I$$

$$(A \cdot B) \cdot (B^{-1} \cdot A^{-1}) = A \cdot A^{-1} = I \text{ porque } A \cdot I = A$$

Por tanto, es cierto que $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

PARA PRACTICAR

Operaciones con matrices

- 1 Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$, calcula:
 - a) $-2A + 3B$
 - b) $\frac{1}{2} A \cdot B$
 - c) $B \cdot (-A)$
 - d) $A \cdot A - B \cdot B$
- 2 Efectúa el producto $\begin{pmatrix} -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
- 3 a) ¿Son iguales las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ y $B = (2 \ 3)$?
 b) Halla, si es posible, las matrices AB ; BA ; $A + B$; $A^t - B$.
- 4 Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
 comprueba que:
 - a) $(A + B)^t = A^t + B^t$
 - b) $(3A)^t = 3A^t$
- 5 Calcula $3AA^t - 2I$, siendo $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$.
- 6 Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, comprueba que $(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$.
- 7 Calcula, en cada caso, la matriz B que verifica la igualdad:
 - a) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} + B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 6 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$
 - b) $2 \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} - 3B = \begin{pmatrix} -5 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Matriz inversa

- 8 Comprueba que la matriz inversa de A es A^{-1} :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -6 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$
- 9 ¿Cuál es la matriz inversa de la matriz unidad?

- 10 Halla la matriz inversa de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ y la de $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.

- 11 Con las matrices A y B del ejercicio anterior y sus inversas, A^{-1} y B^{-1} , comprueba que:
 - a) $(A + B)^{-1} \neq A^{-1} + B^{-1}$
 - b) $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$

Rango de una matriz

- 12 Estudia la dependencia o independencia lineal de los siguientes conjuntos de vectores:
 - a) $\vec{u}_1 = (1, -1, 3, 7)$, $\vec{u}_2 = (2, 5, 0, 4)$ y di cuál es el rango de la matriz cuyas columnas son \vec{u}_1 y \vec{u}_2 .
 - b) $\vec{v}_1 = (1, 0, -2, 3, 1)$, $\vec{v}_2 = (2, -1, 3, 0, 2)$, $\vec{v}_3 = (4, -1, -1, 6, 4)$ y di cuál es el rango de la matriz cuyas filas son $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$.

- 13 S Estudia el rango de estas matrices y di, en cada caso, el número de columnas que son L.I.:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 5 & 11 \\ 1 & -1 & 6 & 29 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & -1 \\ 6 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 & -1 \\ 1 & 5 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 7 & 5 & 5 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Ecuaciones con matrices

- 14 S Halla las matrices X e Y que verifican el sistema $2X + Y = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, $X - Y = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
- 15 S Calcula X tal que $X - B^2 = A \cdot B$, siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
- 16 S Determina los valores de m para los cuales $X = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ verifique $X^2 - \frac{5}{2}X + I = 0$.
- 17 S Resuelve: $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x \\ y & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

PARA RESOLVER

18 S Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & -1 \\ -3 & -4 & 1 \\ -3 & -4 & 0 \end{pmatrix}$, calcula A^2 , A^3 , ..., A^{128} .

19 S Comprueba que $A^2 = 2A - I$, siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix} \text{ e } I \text{ la matriz unidad de orden 3. Utiliza esa igualdad para calcular } A^4.$$

20 S Determina a y b de forma que la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ a & b \end{pmatrix} \text{ verifique } A^2 = A.$$

21 S Calcula A^n y B^n siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1/7 & 1/7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

22 S Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, halla una matriz B

$$\text{tal que } A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

23 S Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, prueba que A^3 es la matriz nula.

Demuestra después que la matriz $I + A + A^2$ es la matriz inversa de $I - A$.

☛ Multiplica $I + A + A^2$ por $I - A$.

24 Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix}$, comprueba que $(A + I)^2 = 0$ y expresa A^2 como combinación lineal de A e I .

25 a) Comprueba que la inversa de A es A^{-1} :

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/5 & -2/5 & 0 \\ -3/5 & 6/5 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

b) Calcula la matriz X que verifica $XA = B$, siendo A la matriz anterior y $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.

26 Estudia la dependencia lineal de los siguientes conjuntos de vectores según los valores del parámetro t :

a) $\vec{u}_1 = (1, -1, 0, 2)$, $\vec{u}_2 = (2, 0, 1, -2)$,

$$\vec{u}_3 = (3, 1, 1, t)$$

b) $\vec{v}_1 = (2, -2, 0, 0)$, $\vec{v}_2 = (1, 5, 3, 3)$,

$$\vec{v}_3 = (1, 1, t, 1)$$
, $\vec{v}_4 = (2, 6, 4, 4)$

27 S Estudia el rango de las siguientes matrices según el valor del parámetro k :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & k \end{pmatrix} \quad N = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ -2 & 1 & 3 \\ 1 & k & 2 \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 2 & 6 & 4 & k \\ 4 & 12 & 8 & -4 \end{pmatrix} \quad Q = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 10 & 3 & k \end{pmatrix}$$

28 Halla el valor de k para que el rango de la matriz A sea 2.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -5 & -6 \\ -5 & 3 & -1 \\ 0 & k & 7 \end{pmatrix}$$

29 Halla X e Y sabiendo que $5X + 3Y = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -4 & 15 \end{pmatrix}$ y $3X + 2Y = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 9 \end{pmatrix}$.

30 Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, halla dos números reales m y n tales que $A + mA + nI = 0$.

31 Determina, si es posible, un valor de k para que la matriz $(A - kI)^2$ sea la matriz nula, siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

32 S Una compañía de muebles fabrica butacas, mecedoras y sillas, y cada una de ellas de tres modelos: E (económico), M (medio) y L (lujo). Cada mes produce 20 modelos E, 15 M y 10 L de butacas; 12 modelos E, 8 M y 5 L de mecedoras, y 18 modelos E, 20 M y 12 L de sillas. Representa esta información en una matriz y calcula la producción de un año.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

- 33**
S En un edificio hay tres tipos de viviendas: L3, L4 y L5. Las viviendas L3 tienen 4 ventanas pequeñas y 3 grandes; las L4 tienen 5 ventanas pequeñas y 4 grandes, y las L5, 6 pequeñas y 5 grandes. Cada ventana pequeña tiene 2 cristales y 4 bisagras, y las grandes, 4 cristales y 6 bisagras.

- a) Escribe una matriz que describa el número y tamaño de ventanas de cada vivienda y otra que exprese el número de cristales y bisagras de cada tipo de ventana.
- b) Calcula la matriz que expresa el número de cristales y de bisagras de cada tipo de vivienda.

- 34**
S Un industrial fabrica dos tipos de bombillas: transparentes (T) y opacas (O). De cada tipo se hacen cuatro modelos: M_1 , M_2 , M_3 y M_4 .

	T	O	
M_1	300	200	Esta tabla muestra la producción semanal de bombillas de cada tipo y modelo.
M_2	400	250	
M_3	250	180	
M_4	500	300	

El porcentaje de bombillas defectuosas es el 2% en el modelo M_1 , el 5% en el M_2 , el 8% en el M_3 y el 10% en el M_4 .

Calcula la matriz que expresa el número de bombillas transparentes y opacas, buenas y defectuosas, que se producen.

- 35**
S Halla todas las matrices X de la forma $\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$ tales que $X^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

- 36**
S Calcula una matriz X que conmuta con la matriz A , esto es, $A \cdot X = X \cdot A$, siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, y calcula $A^2 + 2A^{-1} \cdot X$.

- 37**
S Sean A y B las matrices dadas por:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Encuentra las condiciones que deben cumplir los coeficientes a , b , c para que se verifique $A \cdot B = B \cdot A$.

- 38**
S Dada la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

prueba que se verifica $A^3 + I = 0$ y utiliza esta igualdad para obtener A^{10} .

• Haz $A^{10} = (A^3)^3 \cdot A$ y ten en cuenta que $A^3 = -I$.

- 39**
S Una matriz cuadrada se llama *ortogonal* cuando su inversa coincide con su traspuesta.

Calcula x e y para que esta matriz A sea ortogonal:

$$A = \begin{pmatrix} 3/5 & x & 0 \\ y & -3/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

• Haz $A \cdot A^t = I$.

- 40**
S Resuelve la ecuación matricial:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 22 & 14 \end{pmatrix}$$

CUESTIONES TEÓRICAS

- 41**
S Justifica por qué no es cierta la igualdad:

$$(A + B) \cdot (A - B) = A^2 - B^2$$

cuando A y B son dos matrices cualesquiera.

- 42**
S Sea A una matriz de dimensión 2×3 :

a) ¿Existe una matriz B tal que $A \cdot B$ sea una matriz de una sola fila?

b) ¿Y para $B \cdot A$?

Pon un ejemplo para cada caso, siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- 43**
S Sean A y B dos matrices cuadradas de igual tamaño. Si A y B son simétricas, ¿lo es también su producto $A \cdot B$?

Si la respuesta es afirmativa, justifícala, y si es negativa, pon un contraejemplo.

44 S Definimos la *traza* de una matriz cuadrada A de orden 2 como $\text{tr}(A) = a_{11} + a_{22}$. Prueba que si A y B son dos matrices cuadradas de orden 2, entonces $\text{tr}(A \cdot B) = \text{tr}(B \cdot A)$.

45 Sea A una matriz cuadrada de orden 3 tal que $a_{ij} = 0$ si $i \neq j$ (A es una matriz diagonal). Prueba que el producto de dos matrices diagonales es una matriz diagonal.

46 Sean $A = (a_{ij})_{m,n}$, $B = (b_{ij})_{n,p}$, $C = (c_{ij})_{p,r}$.
¿Qué condiciones deben cumplir p , q y r para que se puedan efectuar las siguientes operaciones?

a) $A \cdot C \cdot B$

b) $A \cdot (B + C)$

47 S Sea A una matriz de dos filas y dos columnas cuyo rango es 2. ¿Puede variar su rango si le añadimos una fila o una columna?

48 S Una matriz de 3 filas y 3 columnas tiene rango 3.
a) ¿Cómo puede variar el rango si quitamos una columna?

b) Si suprimimos una fila y una columna, ¿podemos asegurar que el rango de la matriz resultante será 2?

49 S a) Si A es una matriz regular de orden n y existe una matriz B tal que $AB + BA = 0$, probar que $BA^{-1} + A^{-1}B = 0$.

b) Si $A = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$, halla una matriz $B \neq 0$ tal que $AB + BA = 0$.

50 S Demuestra que si una matriz verifica $A^2 = 0$ (0 es la matriz nula), entonces A no puede tener inversa.

51 ¿Es posible añadir una fila a la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 2 & 7 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

de forma que la nueva matriz tenga rango 4?

Razona la respuesta.

PARA PROFUNDIZAR

52 Sean A y B dos matrices cuadradas del mismo orden. De la igualdad $A \cdot B = A \cdot C$ no puede deducirse, en general, que $B = C$.

a) Prueba esta afirmación buscando dos matrices B y C distintas tales que $A \cdot B = A \cdot C$, siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

b) ¿Qué condición debe cumplir la matriz A para que de $A \cdot B = A \cdot C$ se pueda deducir que $B = C$?

53 S Halla una matriz cuadrada de orden 2, distinta de I y de $-I$, cuya inversa coincida con su traspuesta.

54 Estudia el rango de las siguientes matrices según los valores de a :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & a \\ a & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

55 S Se dice que una matriz es *antisimétrica* cuando su traspuesta es igual a su opuesta. Obtén la forma general de una matriz de orden 2 que sea antisimétrica.

PARA PENSAR UN POCO MÁS

56 Recuerda que una matriz A es *simétrica* si $A' = A$. Una matriz se llama *antisimétrica* si $-A' = A$. (Tanto las matrices simétricas como las antisimétricas son, obviamente, cuadradas.) Demuestra que en una matriz antisimétrica todos los elementos de la diagonal principal son ceros.

57 Decimos que una matriz cuadrada es *mágica* de suma k cuando la suma de los elementos de cada fila, así como los de cada columna y los de las dos diagonales es, en todos los casos, igual a k . ¿Cuánto vale k si una matriz mágica es antisimétrica? Halla todas las matrices mágicas antisimétricas de orden 3.

58 Obtén todas las matrices mágicas simétricas de orden 3 para $k = 0$.

59 Obtén todas las matrices mágicas simétricas de orden 3 para $k = 3$.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS RESUELTOS

3

1. Propiedades de los determinantes

Si $\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix} = 7$, calcula

el valor de los siguientes determinantes sin desarrollarlos:

a) $\begin{vmatrix} c & a & b \\ r & p & q \\ z & x & y \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} 3a & 3b & 3c \\ a+p & b+q & c+r \\ -x+a & -y+b & -z+c \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} a+2x & b+2y & c+2z \\ p & q & r \\ 2x+p & 2y+q & 2z+r \end{vmatrix}$

a) Hemos permutado la 2ª y 3ª columnas, y después la 1ª y 2ª. Ha habido dos cambios de signo.

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a & c & b \\ p & r & q \\ x & z & y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c & a & b \\ r & p & q \\ z & x & y \end{vmatrix} = 7$$

b) La 1ª fila ha sido multiplicada por 3 y la 3ª, por -1. Por ello, el determinante queda multiplicado por -3. Las otras transformaciones no cambian el valor del determinante.

$$\begin{vmatrix} 3a & 3b & 3c \\ a+p & b+q & c+r \\ -x+a & -y+b & -z+c \end{vmatrix} = -3 \begin{vmatrix} a & b & c \\ p+a & q+b & r+c \\ x-a & y-b & z-c \end{vmatrix} =$$

$$= -3 \begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix} = -21$$

c) La transformación hecha en la 1ª fila no cambia el valor del determinante, pero sí la de la 3ª fila, que ha sido multiplicada por 2.

$$\begin{vmatrix} a+2x & b+2y & c+2z \\ p & q & r \\ 2x+p & 2y+q & 2z+r \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ 2x & 2y & 2z \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix} = 14$$

2. Valor de un determinante

Halla, en función de a , el valor del siguiente determinante:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{vmatrix}$$

Sumamos las columnas 2ª, 3ª y 4ª a la 1ª columna:

$$\begin{vmatrix} a+3 & 1 & 1 & 1 \\ a+3 & a & 1 & 1 \\ a+3 & 1 & a & 1 \\ a+3 & 1 & 1 & a \end{vmatrix} = (a+3) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{vmatrix}$$

FILAS
(1ª)
(2ª) - (1ª)
(3ª) - (1ª)
(4ª) - (1ª)

$$= (a+3) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a-1 \end{vmatrix} =$$

$$= (a+3)(a-1)^3$$

El valor del último determinante es igual al producto de los elementos de la diagonal principal, por corresponder a una matriz triangular.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS RESUELTOS

3. Cálculo del rango de una matriz

Halla el rango de la siguiente matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 5 & -2 & 5 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Tomamos un menor de orden 2 no nulo: $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 4 \neq 0$

Por tanto, $\text{ran}(A) \geq 2$, ya que hay por lo menos dos filas linealmente independientes.

Veamos si la tercera fila depende linealmente de las dos primeras.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & -2 \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & 5 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \text{La 3ª fila es combinación lineal de las dos primeras.}$$

Comprobamos si la cuarta fila depende linealmente de las dos primeras:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 2 + 2 - 4 \neq 0 \rightarrow \text{Las filas 1ª, 2ª y 4ª son linealmente independientes.}$$

Por tanto, $\text{ran}(A) = 3$.

4. Resolver una ecuación

Resuelve la ecuación siguiente:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & -1 & 3 & 2 \\ x^2 & 1 & 9 & 4 \\ x^3 & -1 & 27 & 8 \end{vmatrix} = 0$$

Restamos la cuarta columna a las otras tres y desarrollamos por la primera fila:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ x-2 & -3 & 1 & 2 \\ x^2-4 & -3 & 5 & 4 \\ x^3-8 & -9 & 19 & 8 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} x-2 & -3 & 1 \\ x^2-4 & -3 & 5 \\ x^3-8 & -9 & 19 \end{vmatrix} \stackrel{(1)}{=}$$

$$\stackrel{(1)}{=} -(-3)(x-2) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x+2 & 1 & 5 \\ x^2+2x+4 & 3 & 19 \end{vmatrix} \stackrel{(2)}{=}$$

(1) La primera columna es múltiplo de $(x-2)$ y la segunda, de (-3) .

$$\stackrel{(2)}{=} 3(x-2) \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x-3 & -4 & 5 \\ x^2+2x-15 & -16 & 19 \end{vmatrix} \stackrel{(3)}{=}$$

(2) Restamos la tercera columna a las otras dos.

$$\stackrel{(3)}{=} 3(x-2)(x-3)(-4) \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \\ x+5 & 4 & 19 \end{vmatrix} =$$

(3) La primera columna es múltiplo de $x-3$ y la segunda, de (-4) .

$$= -12(x-2)(x-3) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x+5 & 4 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow -12(x-2)(x-3)(-x-1) = 0$$

Las soluciones son: $x = 2$; $x = 3$; $x = -1$

5. Estudio del rango de una matriz que depende de un parámetro

Estudia el rango de las matrices M y N según los valores de a : a) Hallamos los valores que anulan el determinante de M :

$$a) M = \begin{pmatrix} a+1 & 1 & 1 \\ 1 & a+1 & 1 \\ 1 & 1 & a+1 \end{pmatrix}$$

$$|M| = (a+1)^3 + 1 + 1 - 3(a+1) = 0 \rightarrow a^3 + 3a^2 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow a^2(a+3) = 0 \begin{cases} a = 0 \\ a = -3 \end{cases}$$

$$b) N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 0 & 2 \\ 4 & a & -1 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

■ Para $a = 0$:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ Solo hay una fila linealmente independiente, luego } \text{ran}(M) = 1.$$

■ Para $a = -3$:

$$M = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \text{ Sabemos que } |M| = 0.$$

Buscamos un menor de orden 2 distinto de 0. Por ejemplo:

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \neq 0$$

Luego $\text{ran}(M) = 2$.

■ Si $a \neq 0$ y $a \neq -3 \rightarrow |M| \neq 0$ y, por tanto, $\text{ran}(M) = 3$.

b) Buscamos el valor de a que hace 0 el determinante formado por las tres primeras columnas:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & a & -1 \end{vmatrix} = -7a - 7 \rightarrow -7a - 7 = 0 \rightarrow a = -1$$

■ Para $a \neq -1$, $\text{ran}(N) = 3$, ya que el menor de orden 3 formado por las tres primeras columnas es distinto de 0.

■ Para $a = -1$, calculamos los menores de orden 3 formados por la 1ª, 2ª y 4ª columna y por la 1ª, 2ª y 5ª:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \\ 4 & -1 & 6 \end{vmatrix} = -6 - 6 + 12 = 0 \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 4 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

Hemos comprobado que la tercera fila es combinación lineal de las otras dos. Por tanto:

$$\text{ran}(N) = 2, \text{ ya que } \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$$

EJERCICIOS Y PROBLEMAS RESUELTOS

6. Demostrar una igualdad

Demuestra que si:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

se verifica:

$$A^2 - (a + d)A + |A|I = 0$$

donde I es la matriz unidad de orden 2 y 0 es la matriz nula de orden 2.

$$A^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ca + dc & cb + d^2 \end{pmatrix}$$

$$(a + d)A = (a + d) \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + da & ab + db \\ ac + dc & ad + d^2 \end{pmatrix}$$

$$|A|I = (ad - bc) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ad - bc & 0 \\ 0 & ad - bc \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} A^2 - (a + d)A + |A|I &= \\ &= \begin{pmatrix} a^2 + bc - a^2 - ad + ad - bc & ab + bd - ab - db \\ ac + cd - ac - dc & cb + d^2 - ad - d^2 + ad - bc \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

7. Propiedades de los determinantes y rango de una matriz

Sea B una matriz 3×3 cualquiera. Indica, justificando las respuestas, si son ciertas o falsas las siguientes afirmaciones:

a) Si $\text{ran}(B) = 2$, entonces $\text{ran}(B^2) = 2$.

b) Si $\text{ran}(B) = 3$, entonces $\text{ran}(B^3) = 3$.

c) Si $\text{ran}(B) = 3$, entonces $\text{ran}(B^{-1}) = 3$.

a) Falsa. Si $\text{ran}(B) = 2$, entonces:

$$|B| = 0 \text{ y } |B^2| = |B| \cdot |B| = 0$$

Esto nos indica que $\text{ran}(B^2) \leq 2$.

El rango de B^2 puede ser igual a 1, como prueba el siguiente ejemplo:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{ran}(B) = 2 \text{ y } \text{ran}(B^2) = 1$$

b) Verdadera. Si $\text{ran}(B) = 3$, entonces:

$$|B| \neq 0 \text{ y } |B^3| = |B|^3 \neq 0$$

$$\text{Por tanto, } \text{ran}(B^3) = 3.$$

c) Verdadera. Como:

$$BB^{-1} = I \rightarrow |B \cdot B^{-1}| = |I| \rightarrow |B| |B^{-1}| = 1 \rightarrow$$

$$\rightarrow |B^{-1}| = \frac{1}{|B|} \neq 0$$

ya que $|B| \neq 0$, porque $\text{ran}(B) = 3$.

PARA PRACTICAR

1
5 De las siguientes operaciones con determinantes de orden 2×2 , señala las que son correctas y, en su caso, enuncia las propiedades que se utilizan:

a) $\begin{vmatrix} a & a \\ b & b \end{vmatrix} = 0$

b) $\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$

2
5 Si $\begin{vmatrix} m & n \\ p & q \end{vmatrix} = -5$, ¿cuál es el valor de cada uno de estos determinantes? Justifica las respuestas:

a) $\begin{vmatrix} m+3n & p+3q \\ n & q \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} p & m \\ q & n \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} 3n & -m \\ 3q & -p \end{vmatrix}$ d) $\begin{vmatrix} p & 2m \\ q & 2n \end{vmatrix}$

e) $\begin{vmatrix} 1 & n/m \\ mp & mq \end{vmatrix}$ f) $\begin{vmatrix} m & 5m \\ p & 5p \end{vmatrix}$

3 Sustituye los puntos suspensivos por los números adecuados para que se verifiquen las siguientes igualdades:

a) $\begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \dots & 7 \\ \dots & -3 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} -4 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \dots & \dots \\ 2 & 0 \end{vmatrix}$

4
5 Resuelve estas ecuaciones:

a) $\begin{vmatrix} 1+x & 1-x \\ 1-x & 1+x \end{vmatrix} = 12$

b) $\begin{vmatrix} \sin x & \cos x \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$

c) $\begin{vmatrix} x-2 & 1-2x \\ x & x^2 \end{vmatrix} = 0$

5 Calcula el valor de estos determinantes:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 8 & 1 \\ 1 & 7 & 0 \\ 1 & 6 & -1 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} 3 & 4 & -6 \\ 2 & -1 & 1 \\ 5 & 3 & -5 \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} 7 & 8 & 0 \\ 0 & -7 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} 0 & 3 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 0 \end{vmatrix}$

e) $\begin{vmatrix} 0 & 4 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

f) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$

6
5 Halla el rango de las siguientes matrices:

a) $C = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 6 & 10 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & 5 & 0 \end{pmatrix}$

b) $D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & -1 \\ 4 & 5 & 6 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

7
5 Halla los valores de a que anulan cada uno de los siguientes determinantes:

a) $\begin{vmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & a \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} a-1 & 1 & -1 \\ 0 & a+6 & 3 \\ a-1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & a^2 \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} a+1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & a \\ 1 & a & 2 \end{vmatrix}$

Desarrolla, iguala a 0 y resuelve la ecuación que obtengas.

8
5 Calcula el valor de los siguientes determinantes:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 5 & -3 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 7 & 0 \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & -5 & 10 & 4 \\ 7 & -8 & 9 & -2 \end{vmatrix}$

EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

PARA RESOLVER

- 9 **S** Justifica, sin desarrollar, que los siguientes determinantes son nulos:

$$a) \begin{vmatrix} -8 & 25 & 40 \\ 2/5 & 3 & -2 \\ 0 & 27 & 0 \end{vmatrix}$$

$$b) \begin{vmatrix} 5 & 5 & 5 \\ a & b & c \\ b+c & a+c & a+b \end{vmatrix}$$

- 10 **S** Prueba, sin desarrollar, que $|A|$ es múltiplo de 3 y $|B|$ es múltiplo de 5:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 7 & 1 \\ 8 & 2 & 5 \end{vmatrix} \quad |B| = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 4 & 7 & 6 \\ 6 & 3 & 9 \end{vmatrix}$$

- 11 **S** ¿Para qué valores de a se anula este determinante?

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -3 & 8 \\ a & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -2 \end{vmatrix}$$

Calcula el rango de la matriz A en los siguientes casos:

$$a = 1 \quad a = 0 \quad a = 2$$

- 12 **S** Estudia el rango de las siguientes matrices según el valor del parámetro que aparece en ellas:

$$a) A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & a \end{pmatrix}$$

$$b) B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & a \\ a & 3 & 4 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$c) C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -3 & 8 \\ a & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$d) D = \begin{pmatrix} a & -1 & 1 \\ 1 & -a & 2a-1 \end{pmatrix}$$

- 13 **S** ¿Para qué valores de x se anulan los determinantes siguientes?

$$a) \begin{vmatrix} x & 1 & 0 & 0 \\ 0 & x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & x & 1 \\ 1 & 0 & 0 & x \end{vmatrix} = 0$$

$$b) \begin{vmatrix} a & b & c \\ a & x & c \\ a & b & x \end{vmatrix} = 0$$

$$c) \begin{vmatrix} -x & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -x & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -x & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -x \end{vmatrix} = 0$$

$$d) \begin{vmatrix} x & -1 & -1 & 0 \\ -x & x & -1 & 1 \\ 1 & -1 & x & 1 \\ 1 & -1 & 0 & x \end{vmatrix} = 0$$

- 14 **S** Determina el rango de las siguientes matrices según los valores de t :

$$a) A = \begin{pmatrix} t & 1 & 1 \\ 1 & -t & 1 \\ 1 & 1 & t \end{pmatrix}$$

$$b) B = \begin{pmatrix} t & 2 & 2 \\ 2 & t & 0 \\ 1 & t & t \end{pmatrix}$$

$$c) C = \begin{pmatrix} t+3 & 4 & 0 \\ 0 & t-1 & 1 \\ -4 & -4 & t-1 \end{pmatrix}$$

$$d) D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ -t & 6 & 3-t & 9-t \end{pmatrix}$$

$$e) E = \begin{pmatrix} t & t & 0 \\ 2 & t+1 & t-1 \\ -2t-1 & 0 & t+3 \end{pmatrix}$$

$$f) F = \begin{pmatrix} t & 1 & 1 & 2 \\ 2 & t & t^2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$g) G = \begin{pmatrix} 3-t & 3 & 2t \\ -2 & 0 & -1 \\ -1 & -3 & -2-t \\ t+2 & 0 & t \end{pmatrix}$$

- 15 5 Calcula el valor de este determinante dando el resultado factorizado:

$$\begin{vmatrix} 3 & x & x & x \\ x & 3 & x & x \\ x & x & 3 & x \\ x & x & x & 3 \end{vmatrix}$$

- 16 5 Halla, en función de a , el valor de los determinantes siguientes:

$$A_1 = \begin{vmatrix} a+1 & a & a & a \\ a & a+1 & a & a \\ a & a & a+1 & a \\ a & a & a & a+1 \end{vmatrix}$$

$$A_2 = \begin{vmatrix} a & a & a & a \\ 2 & a & a & a \\ 3 & 2 & a & a \\ 4 & 3 & 2 & a \end{vmatrix}$$

- 17 Prueba, sin desarrollarlos, que el valor de los siguientes determinantes es 0:

a) $\begin{vmatrix} x & x+1 & x+2 \\ x & x+3 & x+4 \\ x & x+5 & x+6 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1+a & 2+a & 3+a & 4+a \\ a & a & a & a \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{vmatrix}$

- 18 5 Sabiendo que $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix} = 5$, calcula el valor

de los siguientes determinantes:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a+7 & b+7 & c+7 \\ x/2 & y/2 & z/2 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} 1-x & 1-y & 1-z \\ a+2x & b+2y & c+2z \\ 2x & 2y & 2z \end{vmatrix}$

- 19 5 Las matrices A y B tienen 3 filas y 12 columnas pero, en el proceso de edición, algunas de estas se han borrado.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & \dots & \dots & \dots \\ 3 & -1 & 0 & \dots & \dots & \dots \\ -7 & 5 & -2 & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & \dots & \dots & \dots \\ 3 & 0 & 1 & \dots & \dots & \dots \\ 5 & 4 & 0 & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

¿Puedes averiguar algo sobre los posibles valores de su rango?

Si llamamos C a la matriz cuyas columnas son las 24 que forman las dos matrices A y B , ¿cuál será el rango de C ?

- 20 5 Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 2a & -b & 3c \\ 3a & 0 & 4c \end{pmatrix}$, donde a, b y c son no nulos.

a) Determina el número de columnas de A que son linealmente independientes.

b) Calcula el rango de A .

- 21 5 Estudia el rango de la siguiente matriz para los distintos valores de a, b y c :

$$M = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 5 \\ a & b & c \\ b+c & a+c & a+b \end{pmatrix}$$

- 22 Estudia el rango de la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- 23 Calcula el valor de este determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

CUESTIONES TEÓRICAS

- 24 ¿Cuál es el valor del determinante de la matriz unidad de orden n ?
¿Y el de una matriz triangular de orden n ?
Justifica tus respuestas.

- 25 Comprueba que el determinante de una matriz de orden 3 es igual al de su traspuesta.

- 26 ¿Sabrías decir cuál de estos dos productos puede formar parte del desarrollo de un determinante de orden 4?

a) $a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} \cdot a_{42}$

b) $a_{14} \cdot a_{41} \cdot a_{23} \cdot a_{32}$

- 27 Comprueba que:

$$\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$$

siendo A y B dos matrices diagonales de orden 3.

- 28 Justifica que $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$

☛ Ten en cuenta que: $A \cdot A^{-1} = I$

- 29 Si A es una matriz cuadrada de orden 4, ¿puedes saber el valor de:

$$a_{21} A_{11} + a_{22} A_{12} + a_{23} A_{13} + a_{24} A_{14}$$

sin conocer los elementos de la matriz?

- 30 Dadas la matrices A y B de orden 4×4 con $|A| = 3$ y $|B| = 2$, calcula:

$$|A^{-1}|, |B^t A| \text{ y } |(AB^{-1})^t|$$

Justifica las respuestas.

- 31 De una matriz cuadrada A se sabe que su determinante vale -1 , y que el determinante de $2A$ vale -8 .

¿Cuál es el orden de la matriz A ? Razona la respuesta.

- 32 Escribe dos matrices A y $B \in \mathcal{M}_{2 \times 2}$ tales que:

a) $\det(A + B) \neq \det(A) + \det(B)$

b) $\det(A + B) = \det(A) + \det(B)$

- 33 Sea A una matriz cuadrada tal que $A^2 = A$.
Demuestra que $\det(A) = 0$ o $\det(A) = 1$.

- 34 Si A y B son dos matrices cuadradas del mismo orden, ¿se verifica que $|A \cdot B| = |B \cdot A|$?
Justifica tu respuesta.

- 35 Si la matriz $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ m & n & p \end{pmatrix}$ tiene rango 2, ¿qué rango tendrá la matriz B ?

$$B = \begin{pmatrix} a & b & c \\ m & n & p \\ m - a & n - b & p - c \end{pmatrix}$$

- 36 Si llamamos c_1, c_2, c_3 a los vectores columna de una matriz A , el determinante puede designarse así:

$$\det(A) = \det(c_1, c_2, c_3)$$

Si $\det(A) = 5$, ¿cuál será el valor de estos determinantes?

a) $\det(c_1 - 3c_2, c_2, c_3)$

b) $\det(c_1, c_2, 2c_3)$

c) $\det(c_1, c_1 - c_2, c_3)$

- 37 a) Define a qué se llama rango de una matriz.
b) Indica, razonando la respuesta, cuáles de las siguientes afirmaciones son ciertas:
- $\text{ran}(A) = \text{ran}(-A)$ ($-A$ es la matriz opuesta de A).
 - $\text{ran}(A) = \text{ran}(A^t)$ (A^t es la matriz traspuesta de A).
 - $\text{ran}(A + B) = \text{ran}(A) + \text{ran}(B)$
 - $\text{ran}(A^2) = [\text{ran}(A)]^2$
 - $\text{ran}(A) = \text{ran}(A^{-1})$ si A tiene inversa (A^{-1} es la matriz inversa de A).

PARA PROFUNDIZAR

- 38 Demuestra, sin desarrollar el determinante, que:

5

$$\begin{vmatrix} a^2 & ab & b^2 \\ 2a & a+b & 2b \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (a-b)^3$$

☛ Haz $c_1 - c_3$ y $c_2 - c_3$. Así podrás sacar factor común $(a-b)^2$. Después, haz $c_1 - 2c_2$.

- 39 Demuestra, sin desarrollar, que:

$$\begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 \\ 1 & b^2 & b^3 \\ 1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} bc & a & a^2 \\ ac & b & b^2 \\ ab & c & c^2 \end{vmatrix}$$

☛ En el segundo miembro multiplica y divide la primera fila por a , la segunda por b y la tercera por c .

- 40 Prueba que:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)$$

☛ Este determinante se llama de **Vandermonde**.

Haz $c_2 - c_1$ y $c_3 - c_1$. Extrae el factor $(b-a)$ de la 2ª columna y $(c-a)$ de la 3ª columna.

- 41 Determina las matrices cuadradas de orden 2 cuyos elementos sean números enteros, con determinante igual a -1 , y tal que su inversa coincida con su traspuesta.

5

☛ Haz $A \cdot A^t = I$ y $|A| = -1$.

Hay 4 soluciones.

PARA PENSAR UN POCO MÁS

- 42 Demostración de que $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$ para determinantes de orden 2:

$$\begin{aligned} |AB| &= \left| \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \right| = \\ &= \begin{vmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{vmatrix} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \begin{vmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} \\ a_{21}b_{11} & a_{21}b_{12} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11}b_{11} & a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} & a_{22}b_{22} \end{vmatrix} + \\ &\quad (1) \quad (2) \\ &+ \begin{vmatrix} a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} \\ a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{12}b_{21} & a_{12}b_{22} \\ a_{22}b_{21} & a_{22}b_{22} \end{vmatrix} \\ &\quad (3) \quad (4) \end{aligned}$$

a) Comprueba que los determinantes (1) y (4) son ambos cero.

b) En (2) y en (3) saca factor común los elementos b_{ij} . Llegarás a $|A| \cdot |B|$, como se quería demostrar.

- 43 La sucesión

$$a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 3, a_4 = 5,$$

$$a_5 = 8, \dots$$

tiene la peculiaridad de que cada término, a partir del tercero, se obtiene sumando los dos anteriores:

$$a_n = a_{n-2} + a_{n-1}$$

para $n \geq 3$.

a) Demuestra por el método de inducción que:

$$a_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

☛ Comprueba que $a_1 = 1$ y que $a_2 = 2$. Comprueba que $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, desarrollando el determinante por la 1ª columna.

b) Teniendo en cuenta lo anterior, di el valor del siguiente determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

EJERCICIOS Y PROBLEMAS RESUELTOS

1. Estudio del carácter de un sistema (teorema de Rouché)

Estudia la compatibilidad de los siguientes sistemas y resuélvelos si tienen solución:

$$a) \begin{cases} x - y = 6 \\ 4x + y = -1 \\ 5x + 2y = -5 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} x + y - z = -2 \\ 2x - y - 3z = -3 \\ x - 2y - 2z = 0 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} x - 2y + z - t = 0 \\ x + y - z = 2 \\ 2x - y + t = 0 \end{cases}$$

a) Calculamos el rango de la matriz de coeficientes $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$.

Como $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$, $\text{ran}(A) = 2$.

Hallamos el rango de la matriz ampliada: $A' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 6 \\ 4 & 1 & -1 \\ 5 & 2 & -5 \end{pmatrix}$

$|A'| = 0$. Por tanto, $\text{ran}(A') = 2$.

Como $\text{ran}(A) = 2$, el sistema es **compatible**. También es **determinado** porque el rango es igual al número de incógnitas.

Para resolverlo tomamos las dos primeras ecuaciones que forman el

menor $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 5 \neq 0$ y aplicamos la regla de Cramer:

$$\begin{cases} x - y = 6 \\ 4x + y = -1 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{\begin{vmatrix} 6 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}}{5} = 1, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 4 & -1 \end{vmatrix}}{5} = -5$$

Solución: (1, -5). Esta solución verifica también la tercera ecuación.

$$b) A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -3 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow |A| = 0 \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \neq 0 \rightarrow \text{ran}(A) = 2$$

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & -3 & -3 \\ 1 & -2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & -3 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} \neq 0 \rightarrow \text{ran}(A') = 3$$

Como $\text{ran}(A) \neq \text{ran}(A')$, el sistema es **incompatible**.

$$c) A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0; \begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 6 \neq 0 \rightarrow \text{ran}(A) = 3$$

El menor de orden 3 distinto de 0 que encontramos en A es también de A' . Por tanto, $\text{ran}(A') = 3$ y el sistema es **compatible**. Como el rango es menor que el número de incógnitas, es **indeterminado**. Para resolverlo, tenemos en cuenta el menor no nulo de A y consideramos z como parámetro ($z = \lambda$).

$$\begin{cases} x - 2y - t = -\lambda \\ x + y = 2 + \lambda \\ 2x - y + t = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{Aplicamos la regla de Cramer:}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -\lambda & -2 & -1 \\ 2 + \lambda & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{6}; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -\lambda & -1 \\ 1 & 2 + \lambda & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{6}; \quad t = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -2 & -\lambda \\ 1 & 1 & 2 + \lambda \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix}}{6}$$

Soluciones: $\left(1 + \frac{\lambda}{3}, 1 + \frac{2}{3}\lambda, \lambda, -1\right)$

2. Discusión de un sistema (teorema de Rouché)

Discute los siguientes sistemas y resuélvelos cuando sean compatibles:

$$a) \begin{cases} x + y = 1 \\ my + z = 0 \\ x + (m+1)y + mz = m+1 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} ax + y + z = a^2 \\ x - y + z = 1 \\ 3x - y - z = 1 \\ 6x - y + z = 3a \end{cases}$$

a) Estudiamos el rango de la matriz de coeficientes $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & m & 1 \\ 1 & m+1 & m \end{pmatrix}$:

$$|A| = m^2 - m = m(m-1). \quad |A| = 0 \text{ para } m = 0, m = 1.$$

■ Si $m \neq 0$ y $m \neq 1$, $\text{ran}(A) = 3 = \text{ran}(A')$. El sistema es **compatible determinado**. Para cada valor de m distinto de 0 y 1, tenemos un sistema con solución única:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & m & 1 \\ m+1 & m+1 & m \end{vmatrix}}{m^2 - m}; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & m+1 & m \end{vmatrix}}{m^2 - m}; \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & m & 0 \\ 1 & m+1 & m+1 \end{vmatrix}}{m^2 - m}$$

$$\text{Solución: } \left(\frac{m}{m-1}, \frac{-1}{m-1}, \frac{m}{m-1} \right)$$

$$\blacksquare \text{ Si } m = 0 \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \rightarrow \text{ran}(A) = 2$$

Como en A' hay dos filas iguales, $\text{ran}(A') = 2 = \text{ran}(A)$. Por tanto, el sistema es **compatible indeterminado**.

Para resolverlo, tomamos las dos primeras ecuaciones y pasamos x al segundo miembro: $x = \lambda$, $y = 1 - \lambda$, $z = 0$

$$\blacksquare \text{ Si } m = 1 \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \rightarrow \text{ran}(A) = 2 \quad \left. \begin{array}{l} \text{El sistema} \\ \text{es } \mathbf{incom-} \\ \text{patible.} \end{array} \right\}$$

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} \neq 0 \rightarrow \text{ran}(A') = 3$$

b) Como el rango de A' puede ser 4, empezamos estudiando su rango:

$$|A'| = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 & a^2 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & 1 \\ 6 & -1 & 1 & 3a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 & a^2 \\ 1+a & 0 & 2 & 1+a^2 \\ 3+a & 0 & 0 & 1+a^2 \\ 6+a & 0 & 2 & 3a+a^2 \end{vmatrix} = -4(a-2)^2$$

■ Si $a \neq 2$, $\text{ran}(A') = 4 > \text{ran}(A)$, el sistema es **incompatible**.

■ Si $a = 2$, $\text{ran}(A') < 4$.

$$\text{Puesto que } \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 10 \neq 0, \quad \text{ran}(A) = \text{ran}(A') = 3$$

El sistema es **compatible determinado**. Para resolverlo, tomamos las tres primeras ecuaciones, que forman un menor distinto de cero, y aplicamos la regla de Cramer, obteniendo:

$$x = 1, \quad y = 1, \quad z = 1$$

3. Sistema homogéneo

Estudia y resuelve el siguiente sistema según los valores de k :

$$\begin{cases} (1-k)x + y = 0 \\ x + (1-k)y + z = 0 \\ y + (1-k)z = 0 \end{cases}$$

Por ser un sistema homogéneo, el rango de la matriz de coeficientes es igual al de la matriz ampliada. Tiene, al menos, la solución trivial $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

Para que tenga otras soluciones, el rango de la matriz de coeficientes debe ser menor que el número de incógnitas.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1-k & 1 & 0 \\ 1 & 1-k & 1 \\ 0 & 1 & 1-k \end{vmatrix} = -k^3 + 3k^2 - k - 1 = 0$$

Comprobamos que $k = 1$ es solución de esta ecuación:

$$-k^3 + 3k^2 - k - 1 = (k-1)(-k^2 + 2k + 1) = 0$$

Soluciones: $k = 1$, $k = 1 + \sqrt{2}$, $k = 1 - \sqrt{2}$

■ Si $k \neq 1$, $k \neq 1 + \sqrt{2}$ y $k \neq 1 - \sqrt{2}$, el sistema es **compatible determinado**. El sistema solo tiene la solución trivial $(0, 0, 0)$.

■ Si $k = 1$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \text{ran}(A) = 2$, ya que $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$.

El sistema es **compatible indeterminado**:

$$\begin{cases} y = 0 \\ x + z = 0 \end{cases} \text{ Solución: } (\lambda, 0, -\lambda)$$

■ Si $k = 1 + \sqrt{2}$, $A = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 1 & 0 \\ 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ 0 & 1 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}$

En este caso, $\text{ran}(A) = 2$, ya que $\begin{vmatrix} 1 & -\sqrt{2} \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$.

El sistema es **compatible indeterminado**:

$$\begin{cases} x - \sqrt{2}y + z = 0 \\ y - \sqrt{2}z = 0 \end{cases} \text{ Solución: } (\lambda, \sqrt{2}\lambda, \lambda)$$

■ Si $k = 1 - \sqrt{2}$, $A = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 & 0 \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \\ 0 & 1 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$

De nuevo, $\text{ran}(A) = 2$, ya que $\begin{vmatrix} 1 & \sqrt{2} \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$.

El sistema es **compatible indeterminado**:

$$\begin{cases} x + \sqrt{2}y + z = 0 \\ y + \sqrt{2}z = 0 \end{cases} \text{ Solución: } (\lambda, -\sqrt{2}\lambda, \lambda)$$

4. Forma matricial de un sistema

Expresa este sistema en forma matricial y resuélvelo utilizando la matriz inversa:

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2x - y + z = 2 \\ x - y + z = 1 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow AX = C$$

Para resolverlo, vamos a obtener la matriz X multiplicando la igualdad $AX = C$ por A^{-1} por la izquierda:

$$(A^{-1}A)X = A^{-1}C \rightarrow IX = A^{-1}C \rightarrow X = A^{-1}C$$

Comprobamos que $|A| = -2 \neq 0$ y hallamos A^{-1} :

$$\text{Adj}(A) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow [\text{Adj}(A)]^t = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1/2 & 0 & -1/2 \\ 1/2 & -1 & 3/2 \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1/2 & 0 & -1/2 \\ 1/2 & -1 & 3/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

La solución del sistema es: (1, 1, 1)

5. Matriz inversa

a) Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & m \end{pmatrix}$$

determina para qué valores del parámetro m existe A^{-1} .

b) Para $m = -1$, resuelve $\det[A^{-1} - xI] = 0$.

a) Para que una matriz cuadrada sea regular, es necesario y suficiente que su determinante no sea nulo.

Calculamos el determinante de A :

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & m \end{vmatrix} = -1$$

Como $|A| \neq 0$ para cualquier valor de m , podemos afirmar que A^{-1} existe siempre.

b) Para $m = -1$ calculamos A^{-1} :

$$\text{Adj}(A) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow [\text{Adj}(A)]^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|} [\text{Adj}(A)]^t = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} - xI = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} - x \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1-x & 1 & 1 \\ -1 & -x & 1 \\ -1 & 1 & -x \end{pmatrix}$$

$$|A^{-1} - xI| = -x^3 - x^2 - x - 1 = 0 \rightarrow -(x+1)(x^2+1) = 0$$

Solución: $x = -1$

6. Ecuaciones matriciales

a) Resuelve la ecuación

$$AX + B = C$$

donde: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

b) Calcula la matriz A sabiendo que verifica la siguiente igualdad:

$$A \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

c) Considera la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Siendo X una matriz columna, discute y, en su caso, resuelve la ecuación matricial:

$$AA^t X = \lambda X$$

según los valores del parámetro real λ .

a) Despejamos la matriz X :

$$AX + B = C \rightarrow AX = C - B \rightarrow A^{-1}AX = A^{-1}(C - B) \rightarrow X = A^{-1}(C - B)$$

Hallamos $C - B = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \\ -2 & -6 \end{pmatrix}$ y $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & -1/2 \\ 1/3 & -1/3 & 1/6 \end{pmatrix}$.

Calculamos $X = A^{-1}(C - B)$ efectuando el producto.

Obtenemos: $X = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$

b) La ecuación es del tipo $AB = 2I$.

Despejamos A multiplicando por B^{-1} por la derecha:

$$ABB^{-1} = 2IB^{-1} \rightarrow A = 2B^{-1}$$

Calculamos B^{-1} :

$$|B| = 6 \rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix} \rightarrow A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2/3 \end{pmatrix}$$

c) $AA^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

La matriz X tiene que ser de dimensión 2×1 .

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} x = \lambda x \\ 2y = \lambda y \end{cases} \rightarrow \begin{cases} (1 - \lambda)x = 0 \\ (2 - \lambda)y = 0 \end{cases}$$

Es un sistema homogéneo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 - \lambda & 0 \\ 0 & 2 - \lambda \end{pmatrix} \rightarrow |A| = (1 - \lambda)(2 - \lambda)$$

$$|A| = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1 \text{ o } \lambda = 2$$

■ Si $\lambda \neq 1$ y $\lambda \neq 2$. El sistema solo tiene la solución trivial, $x = 0$,

$$y = 0: X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

■ Si $\lambda = 1$, $\text{ran}(A) = 1$. El sistema es compatible indeterminado

con soluciones $x = t$, $y = 0$: $X = \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}$

■ Si $\lambda = 2$, $\text{ran}(A) = 1$. El sistema es compatible indeterminado

con soluciones $x = 0$, $y = s$: $X = \begin{pmatrix} 0 \\ s \end{pmatrix}$

PARA PRACTICAR

1 Escribe en forma matricial los siguientes sistemas:

$$a) \begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x + z = -1 \\ x - y + z = 2 \\ 2y - z = 0 \end{cases} \quad b) \begin{cases} x - y + z - t = 2 \\ 3y + t = 1 \\ 2x + y - t = 0 \end{cases}$$

2 Escribe en la forma habitual estos sistemas:

$$a) \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$b) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

3 Estudia la compatibilidad de estos sistemas:

$$a) \begin{cases} x - y = 6 \\ 4x + y = -1 \\ 5x + 2y = -5 \end{cases} \quad b) \begin{cases} x + y - z = -2 \\ 2x - y - 3z = -3 \\ x - 2y - 2z = 0 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} 2x + 3y - z = 3 \\ -x - 5y + z = 0 \\ 3x + y - z = 6 \end{cases} \quad d) \begin{cases} x - y - 2z = 2 \\ 2x + y + 3z = 1 \\ 3x + z = 3 \end{cases}$$

$$e) \begin{cases} x + y + z = 2 \\ x - 2y - 7z = 0 \\ y + z = -1 \\ 2x + 3y = 0 \end{cases} \quad f) \begin{cases} x + 3y + z = -1 \\ x - y - z = -1 \\ 2x + y + 3z = 5 \end{cases}$$

4 Resuelve los siguientes sistemas aplicando la regla de Cramer:

$$a) \begin{cases} 8x + 14y = 2 \\ 3x - 5y = 11 \end{cases} \quad b) \begin{cases} x + y - z = 1 \\ x - y + z = 1 \\ -x + y + z = 1 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} 3x - y = 2 \\ 2x + y + z = 0 \\ 3y + 2z = -1 \end{cases} \quad d) \begin{cases} 2x + y + z = -2 \\ x - 2y - 3z = 1 \\ -x - y + z = -3 \end{cases}$$

$$e) \begin{cases} x + y - z + t = 1 \\ x - y - t = 2 \\ z - t = 0 \end{cases} \quad f) \begin{cases} x - y - z + t = 4 \\ x + y + z - t = 2 \end{cases}$$

5 Calcula la inversa de cada una de las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

6 Estudia y resuelve los sistemas, cuando sea posible:

$$a) \begin{cases} 3x + y - z = 0 \\ x + y + z = 0 \\ y - z = 1 \end{cases} \quad b) \begin{cases} x - 2y + z = -2 \\ -2x + y + z = -2 \\ x + y - 2z = -2 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ -x + 4y + 3z + 2t = 0 \\ x + 7y + 7z + 4t = 0 \\ 2x + 2z + t = 0 \end{cases} \quad d) \begin{cases} x + y = 5 \\ x + z = 6 \\ y + z = 7 \\ 2x + y + z = 11 \end{cases}$$

7 Resuelve los siguientes sistemas homogéneos:

$$a) \begin{cases} x + y - z = 0 \\ 12x - 3y - 2z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} 9x + 3y + 2z = 0 \\ 3x - y + z = 0 \\ 8x + y + 4z = 0 \\ x + 2y - 2z = 0 \end{cases}$$

8 Expresa en forma matricial y resuelve utilizando la matriz inversa:

$$a) \begin{cases} 2x + y = 2 \\ y + 3z = 0 \\ 2x + y + z = 2 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} x + y - z = 3 \\ 2x + y + z = -2 \\ x - 2y - 3z = 1 \end{cases}$$

9 Encuentra el valor de a para que este sistema sea compatible:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ x + 2y = 1 \\ ax + y = 3 \end{cases}$$

EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

- 10 **S** Determina si las siguientes ecuaciones tienen solución y hállala si es posible:

a) $X \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

PARA RESOLVER

- 11 **S** Calcula la matriz inversa de cada una de las siguientes matrices para aquellos valores de a que sea posible:

a) $\begin{pmatrix} a & -1 \\ 1 & a \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 3 & a \\ 1 & a \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} a-2 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$

- 12 **S** Consideramos la matriz siguiente:

$$A = \begin{pmatrix} x & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ x & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Halla los valores de x para los que A tiene inversa.

b) Calcula, si es posible, A^{-1} para $x = 2$.

- 13 **S** Discute los siguientes sistemas según los valores del parámetro m :

a) $\begin{cases} mx + y + z = 4 \\ x + y + z = m \\ x - y + mz = 2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + y + z = m - 1 \\ 2x + y + mz = m \\ x + my + z = 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ x + my + z = 0 \\ 2x + 3y + 4z = 2 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x + my + z = 4 \\ x + 3y + z = 5 \\ mx + y + z = 4 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x + 2z = 3 \\ 3x + y + z = -1 \\ 2y - z = -2 \\ x - y + mz = -5 \end{cases}$ f) $\begin{cases} (1+m)x + y + z = 1 \\ x + (1+m)y + z = m \\ x + y + (1+m)z = m^2 \end{cases}$

- 14 **S** Discute los siguientes sistemas homogéneos en función del parámetro a :

a) $\begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ x + 2y - 3z = 0 \\ 3x - 4y - az = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ ax + 2z = 0 \\ 2x - y + az = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} ax + y - z = 0 \\ x + 2y + z = 0 \\ 3x + 10y + 4z = 0 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 3x + 3y - z = 0 \\ 4x + 2y - az = 0 \\ 3x + 4y + 6z = 0 \end{cases}$

- 15 **S** Determina los valores de m para los cuales son incompatibles estos sistemas:

a) $\begin{cases} mx - y - z = m \\ x - y + mz = m \\ x + y + z = -1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} (m+1)x + y + z = 3 \\ x + 2y + mz = 4 \\ x + my + 2z = 2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x + y - z = m - 4 \\ (m-6)y + 3z = 0 \\ (m+1)x + 2y = 3 \end{cases}$

- 16 **S** ¿Existe algún valor de a para el cual estos sistemas tengan infinitas soluciones?

a) $\begin{cases} 3x - 2y - 3z = 2 \\ 2x + ay - 5z = -4 \\ x + y + 2z = 2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + y + z = a - 1 \\ 2x + y + az = a \\ x + ay + z = 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} (a+1)x + 2y + z = a + 3 \\ ax + y = a \\ ax + 3y + z = a + 2 \end{cases}$

- 17 **S** Discute y resuelve según los valores de m :

$$\begin{cases} mx + y = 2 - 2m \\ x + my = m - 1 \end{cases}$$

- 18 **S** Resuelve la ecuación $A X B = C$ siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

• Multiplica C por A^{-1} por la izquierda y por B^{-1} por la derecha.

- 19 S Dada $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, halla una matriz X tal que

$$AXA = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

• Multiplica dos veces por A^{-1} , una vez por la izquierda y otra por la derecha.

- 20 Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} -9 & 3 \\ -8 & 17 \end{pmatrix}$$

halla la matriz X que verifica $AB + CX = D$.

- 21 Halla X tal que $3AX = B$, siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- 22 Resuelve la ecuación:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- 23 S Discute y resuelve, según los diferentes valores del parámetro a , estos sistemas de ecuaciones:

$$a) \begin{cases} ax + 7y + 20z = 1 \\ ax + 8y + 23z = 1 \\ x - az = 1 \end{cases} \quad b) \begin{cases} x + y + z = 1 \\ ax = 2 \\ ay + 2z = 0 \end{cases}$$

- 24 S Discute el siguiente sistema de ecuaciones según los valores del parámetro a y resuélvelo en el caso $a = 2$:

$$\begin{cases} ax + 2y + 6z = 0 \\ 2x + ay + 4z = 2 \\ 2x + ay + 6z = a - 2 \end{cases}$$

- 25 S Averigua los valores de a para los cuales admiten infinitas soluciones los sistemas siguientes. Obtén todas las soluciones e interpreta geométricamente los resultados obtenidos:

$$a) \begin{cases} x + y + 2z = 3 \\ x + 2y + az = 5 \\ 2x + y - 3z = 4 \end{cases} \quad b) \begin{cases} ax - y = 1 \\ x - ay = 2a - 1 \end{cases}$$

- 26 S Discute la compatibilidad del siguiente sistema según los diversos valores de λ y resuélvelo para $\lambda = -1$ y para $\lambda = 2$:

$$\begin{cases} -x + \lambda y + 2z = \lambda \\ 2x + \lambda y - z = 2 \\ \lambda x - y + 2z = \lambda \end{cases}$$

- 27 S Halla, en función de a , el rango de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & a & -3 \\ 4 & 1 & a \end{pmatrix} \text{ y calcula, si existe, la matriz in-}$$

versa A^{-1} en los casos $a = 1$ y $a = -1$.

- 28 S Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & b \end{pmatrix}$.

- a) ¿Cuándo el determinante de A es el seno de algún número real?
b) Calcula A^{-1} cuando exista.
c) Determina todos los pares (a, b) para los que A coincide con su inversa.

- 29 S Halla los valores del parámetro t para los cuales las matrices A y B no son regulares y calcula:

$$a) A^{-1} \text{ si } t = 1 \quad b) B^{-1} \text{ si } t = 2$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & t & 4 \\ -1 & 3 & t \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & t \\ 1 & 1 & 0 \\ t & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- 30 S Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \lambda \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ \lambda & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ donde λ es cualquier número real:

- a) Encuentra los valores de λ para los que AB es regular.
b) Determina los valores de λ para los que BA es regular.
c) Dados a y b , números reales cualesquiera, ¿puede ser el siguiente sistema compatible determinado?

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

- 31 S En el supuesto de que exista, calcula una matriz X tal que $AX = B$ en los siguientes casos:

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

- 32 S Dado el sistema:

$$S: \begin{cases} x - y + (\alpha + \beta)z = \alpha \\ x + z = \beta \\ x - z = \alpha - 3\beta \end{cases}$$

- a) Demuestra que es compatible determinado para cualquier valor de α y β .
b) Resuélvelo para $\alpha = \beta = 1$.
- 33 a) Discute, en función de a , el siguiente sistema:
- $$\begin{cases} x + ay + z = a + 2 \\ x + y + az = -2(a + 1) \\ ax + y + z = a \end{cases}$$
- b) Resuelve el sistema anterior para el caso $a = -1$.

CUESTIONES TEÓRICAS

- 34 S En un sistema de igual número de ecuaciones que de incógnitas, el determinante de la matriz de coeficientes es igual a 0. Responde razonadamente a las siguientes preguntas:
- a) ¿Puede ser compatible?
b) ¿Puede tener solución única?
c) ¿Se puede aplicar la regla de Cramer?
- 35 S El rango de la matriz de coeficientes de un sistema homogéneo de cuatro ecuaciones y tres incógnitas es igual a 3.

¿Qué puedes decir de su solución? Razona tu respuesta.

- 36 ¿Qué condición debe cumplir una matriz cuadrada para tener inversa?

- 37 Sean A y B inversas una de otra. Si $|A| = 4$, ¿cuánto vale $|B|$?

- 38 S El rango de la matriz de coeficientes de un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas es igual a 1. ¿Qué rango, como máximo, puede tener la matriz ampliada?

- 39 ¿Existe algún valor de a para el cual la matriz $\begin{pmatrix} a & a^2 - 2 \\ 1 & a \end{pmatrix}$ no tenga inversa?

- 40 S Dadas estas ecuaciones: $\begin{cases} 3x - 2y + z = 5 \\ 2x - 3y + z = -4 \end{cases}$

- a) Añade una ecuación para que el sistema sea incompatible.
b) Añade una ecuación para que el sistema sea compatible determinado.

Justifica en cada caso el procedimiento seguido para añadir la ecuación.

- 41 S Representa matricialmente los sistemas:

$$s: \begin{cases} 3x + y = 1 \\ 11x + 4y = 0 \end{cases} \quad s': \begin{cases} 3x + y = 0 \\ 11x + 4y = 1 \end{cases}$$

Resuélvelos y averigua si existe alguna relación entre las soluciones obtenidas y la inversa de la matriz $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 11 & 4 \end{pmatrix}$. Justifica la relación obtenida.

- 42 S Demuestra que no hay valores de m para los que el siguiente sistema no tenga solución:

$$\begin{cases} x + 2y + z = 3 \\ x + 3y + 2z = 5 \\ x + my + 3z = 7 \end{cases}$$

- 43 S Si el rango de la matriz de un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas es dos y el de la matriz ampliada tres, ¿qué interpretaciones geométricas podemos dar a ese sistema? Pon un ejemplo de un sistema de esas características y su interpretación geométrica.

- 44 Si dos sistemas de cuatro ecuaciones lineales con
S cuatro incógnitas, $AX = B$ y $AX = B'$, tienen una misma matriz de coeficientes A , ¿puede ser incompatible uno de los dos sistemas mientras que el otro es compatible y determinado?

- 45 ¿Puede ocurrir que un sistema de ecuaciones
S lineal homogéneo no tenga solución? ¿Puede ocurrir que tenga infinitas soluciones? Razona las respuestas.

- 46 El rango de la matriz de los coeficientes de un
S sistema de cuatro ecuaciones con tres incógnitas es 3. ¿Qué rango puede tener la matriz ampliada? En base a ello, ¿cuántas soluciones tendrá el sistema?

- 47 Determina una matriz A para que el sistema
S homogéneo $AX = 0$ sea equivalente a la ecuación matricial:

$$(x \ y \ z) \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = (0, 0)$$

PARA PROFUNDIZAR

- 48 a) ¿Para qué valor de a este sistema es compatible determinado?

$$\begin{cases} x - 2y = 1 \\ y + z = a \\ x - 3z = -1 \\ y - z = 2 \end{cases}$$

- b) ¿Puede ser compatible indeterminado?

- 49 Estudia y resuelve cuando sea posible:

$$a) \begin{cases} x + y + 2t = 3 \\ 3x - y + z - t = 1 \\ 5x - 3y + 2z - 4t = a \\ 2x + y + z + t = 2 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} ax + z + t = 1 \\ ay + z - t = 1 \\ ay + z - 2t = 2 \\ az - t = 0 \end{cases}$$

- 50 Discute los siguientes sistemas según los valores
S de los parámetros que contienen:

$$a) \begin{cases} x - y + z = 2 \\ 2x + 3y - 2z = -8 \\ 4x + y + az = b \end{cases} \quad b) \begin{cases} x + y + z = a - 1 \\ 2x + y + az = a \\ x + ay + z = b \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} x - 3y + z = a \\ x - z = b \\ x + z = c \end{cases} \quad d) \begin{cases} ax + y - z = b - 1 \\ 2x + ay = b + 1 \\ -x + z = b \end{cases}$$

- 51 Calcula los valores de a y b para los cuales este sistema tiene infinitas soluciones. Resuélvelo para esos valores:

$$a) \begin{cases} ax + y + z = 1 \\ x + ay + z = b \\ x + y + az = 1 \end{cases} \quad b) \begin{cases} ax + y + z = 4 \\ x + y + z = -b \\ x - ay + z = b \end{cases}$$

- 52 Discute en función de λ y μ :

$$S \begin{cases} (\lambda + 1)x + 3y + \lambda z = 1 \\ 3x + (\lambda + 1)y + 2z = \mu - 1 \\ \lambda x + 2y + \lambda z = 2 \end{cases}$$

PARA PENSAR UN POCO MÁS

- 53 Dada la matriz:

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- a) Halla la matriz (A_{ij}) formada por los adjuntos de los elementos de A .

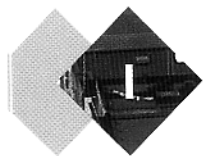
- b) Calcula $|A| = |a_{ij}|$ y $|A_{ij}|$ y halla una relación entre ellos.

- 54 En general, ¿qué relación existe entre el determinante de una matriz A , de orden 3×3 , y el determinante de la matriz formada por sus adjuntos? Para demostrarlo, ten en cuenta que:

$$|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$$

y la expresión de A^{-1} .

- 55 Si A es una matriz cuadrada $n \times n$, da el valor de $|A_{ij}|$ en función de $|A|$.



PRUEBA DE AUTOEVALUACIÓN

OPCIÓN A

- 1 Resuelve el sistema:
$$\begin{cases} y + z - 2x = 0 \\ x + z - 2y = 0 \\ x + y - 2z = 0 \end{cases}$$
- 2
$$\begin{cases} ax + y = a \\ (a+1)x + 2y + z = a+3 \\ 2y + z = 2 \end{cases}$$
 Discute este sistema según los valores del parámetro a y resuélvelo en el caso de que tenga solución única.
- 3 a) Despeja la matriz X en la siguiente ecuación y halla su valor:

$$2A - AX = BX, \text{ siendo } A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$
- b) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, calcula $A^{12} + A^{-1}$.
- 4 a) Se sabe que una matriz no nula verifica $A^2 = A$. Desarrolla la expresión matricial $(A - kI)^3$, siendo I la matriz unidad y k una constante.
- b) Calcula k sabiendo que se cumplen las relaciones $A^2 = A$ y $(A - kI)^3 = A - k^3I$.

OPCIÓN B

- 1 Una cooperativa farmacéutica distribuye un producto en tres tipos de envases, A , B y C , cuyos precios y pesos son los de la tabla de la derecha. A una farmacia se le ha suministrado un pedido de 5 envases con un peso total de 2,5 kg por un importe de 8,90 €. ¿Cuántos envases de cada tipo ha comprado la farmacia?

	PESO (g)	PRECIO (€)
A	250	1,00
B	500	1,80
C	1000	3,30

- 2
$$\begin{vmatrix} a & 1 & 0 & 1 \\ 1 & a & 0 & 1 \\ 0 & 1 & a & 1 \\ 1 & 0 & 1 & a \end{vmatrix}$$
 Calcula, en función de a , el valor de este determinante, dando el resultado factorizado.
- 3 Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} m-1 & 1 & -1 \\ 0 & m-2 & 1 \\ m & 0 & 2 \end{pmatrix}$:
- a) Estudia su rango según los valores de m , y di para cuáles de ellos es invertible.
- b) Halla, si es posible, la inversa para $m = 2$, y comprueba el resultado.
- 4 Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$, determina todas las matrices no nulas $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ que verifican la igualdad $AX = mX$, para algún valor de m .